ECUACIONES DIFERENCIALES **14 Mayo 2013**	1^{er} APELLIDO: __________ 2^{o} APELLIDO: __________	TIEMPO: **2 horas** PUNTOS:
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática, UPM	NOMBRE: __________ N^{o} MATRÍCULA:	NOTA FINAL:

1. (1.5 puntos) Sea $y = y(x)$. Resolver la ecuación de Euler $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$.

SOLUCIÓN. Con el cambio $x = e^s$ la ecuación se trasforma en la ecuación lineal $y''_s - 3y'_s - 4y = 0$. La solución general de esta ecuación lineal es $y(s) = c_1e^{4s} + c_2e^{-s},\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Así, la solución de la ecuación dada es $y(x) = c_1x^4 + c_2x^{-1},\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

2. (1.5 puntos) Sea $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}$ una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado al siguiente sistema completo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5te^{4t} \\ 10e^{4t} \end{bmatrix}$$

Comprobar que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental y hallar una solución particular del sistema completo por el método de variación de las constantes. Expresar la solución general del sistema.

SOLUCIÓN. Sea $X(t) = \Phi(t)C(t)$ solución del sistema completo. Entonces $\Phi(t)C'(t) = B(t)$ y se obtiene que $\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2t-6)e^{5t} \\ t+2 \end{bmatrix}$ y una primitiva es $\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{2}{5}t - \frac{32}{25})e^{5t} \\ \frac{t^2}{2} + 2t \end{bmatrix}$.
Así, una solución particular es $X_p(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{2}{5}t - \frac{32}{25})e^{5t} \\ \frac{t^2}{2} + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t^2 + \frac{32}{5}t - \frac{32}{25} \\ t^2 + \frac{18}{5}t + \frac{32}{25} \end{bmatrix} e^{4t}$.
La solución general es $X(t) = \Phi(t)C + X_p(t)$ con C vector de constantes reales. $\square$

3. (1.5 puntos) Definir la exponencial de una matriz y aplicar la exponencial al cálculo de una matriz fundamental para el sistema tridimensional:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN. El espectro de A es $\sigma(A) = \{2, 1(\text{doble})$. Sea $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \ker(A - 2I)$.
Sea $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \ker(A - I)^2 \setminus \ker(A - I)$ y $v_2 = (A - I)v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. En la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, la matriz es de la forma $J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Así, $e^{J_At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$. Una matriz fundamental es de la forma $\Phi(t) = Pe^{J_At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & e^t \\ 0 & -e^t & -te^t \\ 0 & 0 & -e^t \end{bmatrix}$.

$\square$

4. (2 puntos) Sea $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Resolver el sistema, estudiar la estabilidad de las soluciones y dibujar algunas órbitas en un entorno del $(0, 0)$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Hallar los valores del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ tal que el punto $(0, 0)$ sea un centro estable del sistema $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\mu & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Solución. La solución general del sistema es $X(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. El sistema es inestable puesto que la matriz del sistema tiene dos autovalores reales positivos. Para $c_2 = 0$ se obtienen los semiejes $y = -x, \quad x > 0$ (si $c_1 > 0$) y $y = -x$, $x < 0$ (para $c_1 < 0$). Para $c_1 = 0$ se obtiene los semiejes $y = x$ con $x > 0$ (para $c_2 > 0$) y $y = x$ con $x < 0$ (para $c_2 < 0$). Para $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, si ξ_1 y ξ_2 son las coordenadas de las órbitas respecto del sistema de referencia formado por $v_1 = (1, -1)^T$ y $v_2 = (1, 1)^T$, entonces $\xi_1 = c_1 e^t$ y $\xi_2 = c_2 e^{3t}$ y se obtienen arcos parabólicos $\xi_2 = \frac{c_2}{c_1^3} \xi_1^3$. Todas las trayectorias se alejan del origen cuando $t \to \infty$.

El polinomio característico de la matriz con parámetros es $p(\lambda) = \lambda^2 + \mu - 1$ y sus ceros son $\lambda = \pm\sqrt{\mu - 1}$. Luego $(0, 0)$ es un centro para los valores reales $\mu < 1$.

□

5. (1.5 puntos) Enunciar y probar el criterio negativo de Bendixon en relación con la existencia de soluciones periódicas de un sistema no lineal. Aplicarlo al estudio de soluciones periódicas del sistema $\begin{cases} x' = 2x + y + x^3 \\ y' = 3x - y + y^3 \end{cases}$.

Solución. Las funciones $P(x, y) = 2x + y + x^3$ y $Q(x, y) = 3x - y + y^3$ son continuas y tienen derivadas parciales primeras continuas en todo R^2. Se tiene

$$\mathrm{d}ivV = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 + 3(x^2 + y^2) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

y, por tanto, el sistema no tiene soluciones periódicas. □